Mathematik-Leistungskurs

Zusammenfassung der Inhalte im Leistungskurs Mathematik bezogen auf die Vorgaben für das Abitur in Nordrhein-Westfalen für das Jahr 2012

Erstellt von:

Patrick Robrecht

`http://patrick-robrecht.de/`

Inhaltsverzeichnis

1 Analysis

1.1 Funktionen

Eine Funktion f ordnet jedem $x \in D$ ein $f(x) \in W$ zu.

1. Definitionsbereich $D :=$ Menge der Werte, welche für x eingesetzt werden. Hier sind Definitionslücken auszuschließen (z. B. Division durch 0).

2. Wertebereich $W :=$ Menge der möglichen Funktionswerte $f(x)$

3. Verhalten im Unendlichen und um 0 (nur sofern im Definitionsbereich), also die vier Grenzwerte $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0, x<0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x)$,

4. Symmetrie

   (a) punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn $f(x) = -f(-x)$

   (b) achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn $f(x) = f(-x)$

5. Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

   (a) Nullstellen: Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$, Schnittpunkte sind $N(x \mid 0)$ für alle x, welche die Gleichung erfüllen

   (b) Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0 \mid f(0))$

6. Ableitungen

   (a) 1. Ableitung $f'(x)$: Steigung von $f(x)$ an der Stelle x
   2. Ableitung $f''(x)$: Steigung von $f'(x)$ an der Stelle x usw.

   (b) Ableitungsregeln:

Faktorregel	$f_1(x) = c \cdot g(x)$	$f_1'(x) = c \cdot g'(x)$
Summenregel	$f_2(x) = g(x) \pm h(x)$	$f_2'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
Potenzregel	$f_3(x) = x^n$	$f_3'(x) = n \cdot x^{n-1}$
Produktregel	$f_4(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f_4'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Quotientenregel	$f_5(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f_5'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2}$
Kettenregel	$f_6(x) = u \circ v = u(v(x))$	$f_6'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$
Sinus	$f_7(x) = \sin(x)$	$f_7'(x) = \cos(x)$ und $f_7''(x) = -\sin(x)$
Exponentialfunktion	$f_8(x) = e^x$	$f_8'(x) = e^x$
Logarithmusfunktion	$f_9(x) = x \cdot \ln(x) - x$	$f_9'(x) = \ln(x)$ und $f_9''(x) = \frac{1}{x}$

   (c) Partielle Integration

$$\int_a^b u(x) \cdot v(x)' \, dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u(x)' \, dx$$

(d) Für die Ableitung von Umkehrfunktionen $\bar{f}$ (f quer) mit $D_{\bar{f}} = W_f, W_{\bar{f}} = D_f$ (Beispiel: $f(x) = e^x, \bar{f} = \ln(x)$) gilt:

$$\bar{f}'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ mit } y = f(x), x = \bar{f}(y)$$

streng monotone Funktionen sind immer umkehrbar!

7. Extremstellen: Bedingungen für lokale Minima und Maxima
   (a) notwendig für Extrema: $f'(x) = 0 \Rightarrow$ liefert die (einzigen) möglichen Extremstellen
   (b) hinreichend für Minima: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt(e) $T(x \mid f(x))$
   (c) hinreichend für Maxima: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt(e) $H(x \mid f(x))$
8. Wendestellen
   (a) notwendig: $f''(x) = 0 \Rightarrow$ liefert die (einzigen) möglichen Wendestellen
   (b) hinreichend: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkte $W(x \mid f(x))$
   (c) Sonderfall: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) = 0 \wedge f'''(x) = 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt $S(x \mid f(x))$
9. Regel von l'Hospital für Grenzwerte der Form $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (mit differenzierbare Funktionen f, g), die einen unbestimmten Ausdruck ($\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$ oder $\frac{\infty}{\infty}$) annehmen
   (a) Vorraussetzung: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$ existiert
   (b) Wenn die Vorraussetzung gilt und $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, dann gilt $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$
   (c) Wenn die Vorraussetzung gilt und $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, dann gilt $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$
10. Ortskurve (der Extrempunkte oder der Wendepunkte) einer Funktionenschar $f_k(x)$ (d. i. eine Menge von Funktionen in Abhängigkeit von einem Parameter k) bestimmen
    (a) x-Wert nach Parameter k umformen
    (b) Ergebnis in y-Wert einsetzen

1.2 Integrale

1. $\int_a^b f(x)\,dx$: Integral mit Grenzen a und b, Integrationsvariable x und Integrand $f(x)$
2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

mit $F'(x) = f(x)$, F heißt Stammfunktion von f

3. Flächenberechnungen - Vorgehensweise

   (a) Nullstellen bestimmen

   (b) Stammfunkttion bestimmen

   (c) Integral(e) aufstellen und berechnen

   Bei Flächen unterhalb der x-Achse ergibt sich ein negativer Wert für das Integral!

4. Fläche zwischen den Graphen zweier steitiger Funktionen f, g

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\ dx \text{ wenn } f(x) \geq g(x)$$

5. Uneigentliches Integral: $\lim\limits_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\ dx$

2 Lineare Algebra und analytische Geometrie

2.1 Vektoren

1. Definition: Vektor

   (a) Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$:= Menge zueinander paralleler gleich langer, gleich gerichteter Pfeile; Abbildung eines Punktes A auf einen Punkt B

   (b) Gegenvektor $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$:= Vektor mit gleicher Länge, der parallel zu $\vec{a}$, aber entgegengerichtet ist

   (c) Nullvektor $\vec{0}$:= Abbildung eines Punktes auf sich selbst

   (d) Vektor zwischen den Punkten $A(a_1 \mid a_2 \mid a_3)$ und $B(b_1 \mid b_2 \mid b_3)$: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

   (e) Länge eines Vektors $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

2. Spiegelung eines Ortsvektors (bzw. Punktes in $\mathbb{R}^3$)

   (a) an einer Koordinatenachse: zugehörige Koordinate bleibt gleich, die anderen beiden ändern ihr Vorzeichen

   (b) an einer Koordinatenachsen-Ebene: zugehörige Koordinaten bleiben gleich, die dritte ändert ihr Vorzeichen

3. Rechengesetze für Vektoren

Kommutativgesetz	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
Assoziativgesetz	$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
Multiplikation mit einer Zahl	$r\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix} r\cdot a_1 \\ r\cdot a_2 \\ r\cdot a_3 \end{pmatrix}$
Distributivgesetz	$r\cdot(\vec{a}+\vec{b})=r\cdot\vec{a}+r\cdot\vec{b}$

4. Linearkombination $r_1\cdot\vec{a_1}+r_2\cdot\vec{a_2}+r_3\cdot\vec{a_3}+\ldots$: die r_i heißen Koeffizienten

5. lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

   (a) Eine Menge von Vektoren ist linear abhängig, wenn mindestens ein Vektor als Summe von Vielfachen der anderen darstellbar ist.

   (b) Vektoren $\vec{a_1},\vec{a_2},\ldots,\vec{a_n}$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $r_1\cdot\vec{a_1}+r_2\cdot\vec{_2}+\ldots+r_n\cdot\vec{a_n}=\vec{0}$ nur eine Lösung mit $r_1=r_2=\ldots=r_n=0$ hat.

   (c) In einer Ebene sind maximal zwei Vektoren linear unabhängig.
   lineare Abhängigkeit: zwei Vektoren parallel $\Rightarrow$ kollinear

   (d) Im Raum ($\mathbb{R}^3$) sind maximal drei Vektoren linear unabhängig.
   lineare Abhängigkeit: drei Vektoren in einer Ebene $\Rightarrow$ komplanar

6. Geraden

   (a) Parametergleichung: $\vec{x}=\vec{p}+t\cdot\vec{u}$ für ein $t\in\mathbb{R}$
   $\vec{p}$ heißt Stützvektor, $\vec{u}$ Richtungsvektor

7. Ebenen

   (a) Parametergleichung: $\vec{x}=\vec{p}+r\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{v}$ für $r,s\in\mathbb{R}$
   $\vec{p}$ heißt Stützvektor, $\vec{u},\vec{v}$ heißen Spannvektoren und sind linear unabhängig

   (b) Koordinatengleichung: $a\cdot x_1+b\cdot x_2+c\cdot x_3=d$, wobei $a\neq 0\vee b\neq 0\vee c\neq 0$

   (c) Normalengleichung: $(\vec{x}-\vec{x_0})\cdot\vec{n}=0$
   Normalenvektor $\vec{n}$ mit $\vec{n}\cdot\vec{r}=0\wedge\vec{n}\cdot\vec{s}=0$

   (d) Hess'sche Normalenform: $(\vec{x}-\vec{x_0})\cdot\vec{n_0}=0$ mit Einheitsnormalenvektor $\vec{n_0}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ (somit ist $\mid\vec{n_0}\mid=1$)

   (e) Abstand der Punkte P und R (P in Ebene): $d=|(\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP})\cdot\vec{n_0}|$

8. Lagebeziehungen von zwei Geraden g,h

   (a) Sind die Richtungsvektoren gleich oder Vielfache von einander?

   (b) Liegt der Stützvektor von g auf h?

identisch ($g \cong h$)	LGS ∞ Lösungen (Nuller-Zeile)	(a) ja, (b) ja
parallel ($g \parallel h$)	LGS keine Lösung (Widerspruch / falsche Aussage)	(a) ja, (b) nein
windschief	LGS keine Lösung (Widerspruch / falsche Aussage)	(a) nein
g, h schneiden sich	LGS genau eine Lösung	(a) nein

9. Lagebeziehungen einer Gerade g und einer Ebene E

g schneidet E	LGS genau eine Lösung
g liegt in E	LGS ∞ Lösungen
g parallel zu E ($g \parallel E$)	LGS keine Lösung (Widerspruch / falsche Aussage)

10. Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen E, F

E schneidet F	LGS ∞ Lösungen in Abhängigkeit von Parametern
E in F (identisch)	LGS ∞ Lösungen (Nuller-Zeile / wahre Aussagen)
E parallel zu F ($E \parallel F$)	LGS keine Lösung (Widerspruch / falsche Aussage)

11. Skalarprodukt von Vektoren

    (a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\gamma)$ mit $0° < \gamma < 180°$ (γ ist der Winkel zwischen den Vektoren)

    (b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

2.2 Matrizen

1. Matrix := Zahlenschema mit Elementen, Größe: $\underbrace{m}_{\text{Anzahl der Zeilen}} \times \underbrace{n}_{\text{Anzahl der Spalten}}$

2. Rechenregeln für Matrizen

    (a) Vervielfachung einer Matrix: Skalarmultiplikation

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_{11} & r \cdot a_{12} \\ r \cdot a_{21} & r \cdot a_{22} \end{pmatrix}$$

    (b) Addition/Subtraktion von Matrizen (Bedingung: gleiche Größe)

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}$$

    (c) Multiplikation einer Matrix (Größe $m \times n$) mit einem Vektor (Größe $n \times 1$) von rechts (Bedingung: Anzahl der Spalten der Matrix = Anzahl der Zeilen des Vektors) ergibt einen Vektor (Größe $m \times 1$)

    (d) Multiplikation von zwei Matrizen der Größen $m \times n$ und $n \times p$ ergibt eine Matrix der Größe $m \times p$ (Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ, d. h. für Matrizen A, B gilt i. A.: $A \cdot B \neq B \cdot A$)

3. Austauschprozesse

   (a) Austauschprozess := Prozess, der durch eine quadratische Matrix A mit nichtnegativen Koeffizienten beschrieben wird, bei der die Summe der Koeffizienten in allen Spalten 1 ergibt

   (b) stationäre Verteilung eines Austauschprozesses, der durch die Matrix A beschrieben wird: $A \cdot \vec{g} = \vec{g}$, $\vec{g}$ heißt Fixvektor von A

3 Stochastik

1. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

   (a) Zufallsversuch/-experiment := Versuch, dessen Ergebnis nicht vorhersagbar ist

   (b) Wahrscheinlichkeitsfunktion oder -verteilung P

   $$P\colon S \to \mathbb{R} \ \text{ mit } \ 0 < P(e_i) \leq 1 \ \text{ und } \ \sum_{i=1}^{n} P(e_i) = 1$$

   (c) Ergebnismenge := Menge aller möglichen Ergebnisse $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$

   (d) Ergebnis := möglicher Ausgang eines Zufallsversuchs

   (e) Ereignis: zusammengesetztes Ergebnis

   (f) relative Häufigkeit = Häufigkeit eines Ergebnisses im Verhältnis zur Gesmatzahl

   (g) Laplace-Experiment/-Verteilung := Zufallsversuch, bei dem die Wahrscheinlichkeit für alle Ergebnisse gleich ist:

   $$P(\text{Ereignis}) = \frac{\text{Anzahl der zutreffenden Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

   (h) Zufallsgröße := Funktion, die den Ergebnissen eines Zufallsversuchs Werte zuordnert

   $$X\colon \{\text{Ergebnis(se)}\} \to \{\text{Wert(e)}\}$$

2. Kombinatorische Modelle

   (a) Permutation := Anordnung von Elementen einer Menge

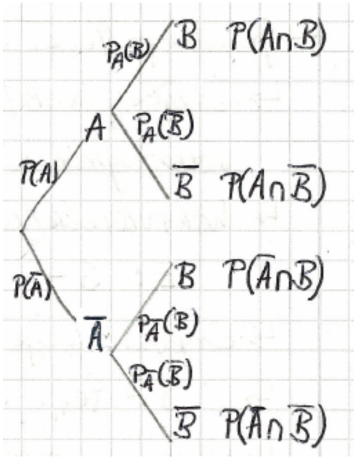
   (b) Anzahl von Möglichkeiten bei n Elementen bei k Ziehungen

	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
mit Reihenfolge	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
ohne Reihenfolge	$\binom{k+n-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

   Definition des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ (gelesen: n über k) nur für $n, k \in \mathbb{N}, k \leq n$

3. Vierfeldertafel

	A	$\bar{A}$	Σ
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
Σ	$P(A)$	$P(\bar{A})$	100 %



4. Bayer'sche Regel: Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis B unter der Bedingung A

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

5. (Un)Abhängigkeit von Ereignissen A und B

   (a) A und B sind abhängig, wenn $P(A) \neq P_B(A)$

   (b) A und B sind unabhängig, wenn $P(A) = P_B(A)$

6. Bernoulli-Experiment: Versuch mit Zurücklegen, bei dem nur Treffen und Nieten unterschieden werden

   (a) Wahrscheinlichkeit für einen Treffer: p (bleibt bei mehrfacher Ausführung gleich!)

   (b) Wahrscheinlichkeit für eine Niete somit: $1 - p$

   (c) Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer bei n Ziehungen:

   $$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

   $\Rightarrow$ Binomialverteilung $B_{n;p}(k)$

   (d) Wahrscheinlichkeit für höchstens k Treffer bei n Ziehungen

   $$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

   (e) Wahrscheinlichkeit für mindestens k Treffer bei n Ziehungen

   $$P(X \geq k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

7. Erwartungswert μ

   (a) einer Zufallsgröße, die die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ annehmen kann:

   $$E(X) = \mu = x_1 \cdot P(X = x_1) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n) = \sum_{i=0}^{k} x_i \cdot P(X = x_i)$$

   (b) einer binomialverteilten Zufallsgröße: $\mu = np$

8. Standardabweichung σ und Varianz $V(X) = \sigma^2$

   (a) allgemein: $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \ldots + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)}$

   (b) einer binomialverteilten Zufallsgröße: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

9. Hypothesentest

   (a) zweiseitiger Hypothesentest für $p = p_0$

      i. μ und σ anhand von n und p berechnen

      ii. Annahmebereich mit entsprechendem c bestimmen

      $$P(\mu - c \cdot \sigma \leq X \leq \mu + c \cdot \sigma) = 1 - \alpha$$

c	P	c	P	c	P
0,8	0,576	1,64	0,90	2,4	0,984
1	0,683	1,8	0,928	2,58	0,99
1,2	0,770	1,96	0,950	2,6	0,991
1,28	0,80	2	0,954	2,8	0,995
1,4	0,838	2,2	0,972	3	0,997
1,6	0,890	2,33	0,975		

      iii. Liegt X im Annahmebereich wird die Hypothese beibehalten, ansonsten verworfen!

   (b) Fehlerarten beim Hypothesentest

	Hypothese wahr	Hypothese falsch
Hypothese angenommen	richtige Entscheidung	Fehler 2. Art
Hypothese abgelehnt	Fehler 1. Art	richtige Entscheidung

   Der Fehler 1. Art tritt mit der Wahrscheinlichkeit Risiko 1. Art auf = Signifikanzniveau α.

   Der Fehler 2. Art tritt mit der Wahrscheinlichkeit Risiko 2. Art auf.

(c) einseitger Hypothesentest (entweder linksseitiger Test oder rechtsseitger Test)

   i. Behauptung H_0: $p = p_0$
   ii. Alternative: $H_1: p < p_0$ (linksseitig) oder $H_1: p > p_0$ (rechtsseitig)
   iii. Annahmebereich: $[\mu - c \cdot \sigma; \mu]$ (linksseitig) bzw. $[0; \mu + c \cdot \sigma]$ (rechtsseitig)
   iv. das c ändert sich im Vergleich zum zweiseitigen Hypothesentest: c bei $1 - 2\alpha$ nachschlagen

(d) Näherungsformel von De Moivre-Laplace: die Normalverteilung
Berechnung der Wahrscheinlichkeit bei binomialverteilten Zufallsgrößen für große n und beliebige reelle Zahlen X (Formel anwendbar, wenn $n > \frac{1}{4 \cdot p^2 \cdot (1-p)^2}$)

$$\begin{aligned} P(k_1 \leq X \leq k_2) &= \Phi\left(\frac{k_2 + 0,5 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - 0,5 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \varphi(t)\ dt \text{ mit } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

(Stetigkeitsfaktor $\pm 0,5$ entfällt bei $\sigma > 3$)